**Varianta 011**

**Subiectul I**

a) AB=BC=$\sqrt{2}$ ; AC=2$\sqrt{2}$ ; b) a=1, b=2; c) $m_{AB} = m_{AC}$ ; d) (1,0); e) $\cos a = \frac{12}{13}$; f) –i;

**Subiectul II**

1. a) x=2; b) 3; c) 2 cifre de 0; d) $2^{10} - 1$; e) $\frac{5}{7}$;

2. a) 2x+4 ; b) $f'(2) = 8$; c) f descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ şi crescătoare pe $[-2, \infty]$;

d) $\frac{19}{3}$; e) $\frac{1}{3}$;

**Subiectul III**

a) f(1)=$2^n$;

b) Se aplică binomul lui Newton şi se ţine cont de puterile lui i;

c) Calcul direct ;

d) f(i)= $(1+i)^n = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$ ;

e) Din b) şi d) identificând părţile reale din expresia lui f(i) se obţine relaţia cerută

f) $f(\cos t + i\sin t) = (1+\cos t + i\sin t)^n = \left(2\cos^2\frac{t}{2} + 2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)^n =$

$= \left(2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)\right)^n = 2^n\cos^n\frac{t}{2}\left(\cos\frac{nt}{2} + i\sin\frac{nt}{2}\right)$

g) $f(\cos t + i\sin t) = (1 + (\cos t + i\sin t))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos t + i\sin t)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kt + i\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kt$ şi ţinând seama de f) rezultă relaţia dată.

**Subiectul IV**

a) $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{(k-2)!k} \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} \le 1$, evident pentru $k \ge 2$ ;

b) $\frac{1}{(k-2)!k} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}, \forall k \ge 2$. Adunand aceste egalitati pentru $k = \overline{2,n}$ obţinem concluzia;

c) $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Folosind a) şi b) obţinem

2< $e_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!\cdot 2} + \frac{1}{1!\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!n} = 3 - \frac{1}{n!} < 3, \forall n \in \mathbf{N}^*$;

d) Din (n-1)! $x_n = (a_0 + \frac{a_1}{1!} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!})(n-1)! + \frac{a_n}{n}, n \ge 2 \Rightarrow x_n \notin \mathbf{Z}$;

e) Se separă termenii cu semnul plus respective cu semnul minus din şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ obținând $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, respectiv $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

f) Şirurile $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de la punctul e) sunt strict crescătoare şi mărginite, deci convergente.

g) Dacă prin absurd $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{p}{q}$, $p,q\in N$, pentru $n > q+1$ avem $\mathrm{x_n} = \sum\limits_{k=0}^{q}\frac{a_k}{k!} + \sum\limits_{k=q+1}^{q}\frac{a_k}{k!}$ in care

inmultim cu $q!$ si obtinem : $\mathrm{q!\cdot x_n} = \mathrm{B} + \mathrm{q!}\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!}$. Trecand la limita pentr $n \to \infty$ rezulta

$\mathrm{q!}\cdot\frac{p}{q} = B + \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{q!}\cdot\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!}$. Din $\mathrm{B}\in\mathbf{Z}$ rezulta $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{q!}\cdot\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!}\in\mathbf{Z}$.

Din $\left|\mathrm{q!}\cdot\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!}\right| \le \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)(q+2)\ldots n} \le \frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)^2} \le \frac{3}{4}$

Pe de alta parte $\left|\mathrm{q!}\cdot\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!}\right| \ge \left|\frac{1}{q+1} - \sum\limits_{\mathrm{k=q+2}}^{n}\frac{q!}{k!}\right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} > 0,$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{q!}\cdot\sum\limits_{\mathrm{k=q+1}}^{\mathrm{n}}\frac{a_k}{k!} \notin \mathbf{Z}$, contradictie.